Análisis Matemático I Examen I

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Análisis Matemático I Examen I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Análisis Matemático I.

Curso Académico 2023-24.

Grado Grado en Matemáticas.

Grupo B.

Profesor Salvador Villegas Barranco.

Fecha 20 de noviembre de 2023.

Ejercicio 1 (4 puntos)**.**

1. Sean (E, d) y (E, ρ) dos espacios métricos de un mismo espacio E. Demostrar que son equivalentes:

   a) Las métricas d y ρ generan la misma topología en E.

   b) $d(x_n, x) \to 0$ si y solo si $\rho(x_n, x) \to 0$, siendo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E,\ x \in E$.

2. Sea (E, d) un espacio métrico. Definimos $\rho : E \times E \to \mathbb{R}$ mediante:

$$\rho(x, y) = \text{mín}\{1, d(x, y)\} \qquad\qquad \forall x, y \in E$$

   Demostrar que ρ es una métrica y que genera la misma topología en E que d.

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Sea $X = \{f : [1, +\infty[\to \mathbb{R} \quad \text{continua} \mid \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0\}$. Demostrar que X es un espacio normado considerando

$$\|f\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|}{2^n} + \int_1^{\infty} \frac{|f(x)|}{x^2}\, dx, \qquad f \in X$$

1. ¿Es la aplicación $T : X \to \mathbb{R}$ definida por $T(f) = f(4)$ lineal y continua?

2. ¿Es la aplicación $T : X \to \mathbb{R}$ definida por $T(f) = f(\pi)$ lineal y continua?

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales, continuidad de las derivadas parciales, y diferenciabilidad en $(0, 0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{|x| + |y|}\,\text{sen}(xy) & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\[2ex] \qquad 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$